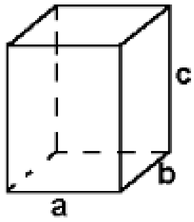
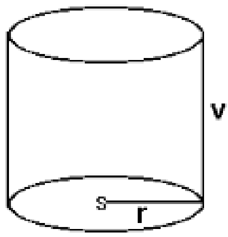
Povrch a objem těles

1) Kvádr: $V = a.b.c$
$S = 2.(ab+bc+ac)$



2) Krychle: $V = a^3$
$S = 6.a^2$

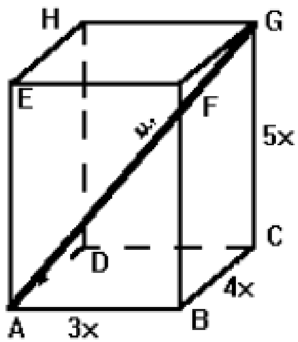
3) Válec: $V = \pi r^2.v$
$S = 2\pi r.(r+v)$



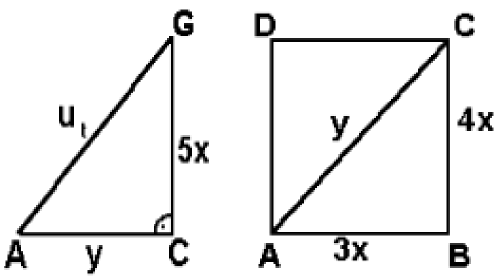
Obecně: V = S podstavy . výška
S = 2 . S podstavy + S pláště

Příklad:
Vypočtěte objem a povrch kvádru, jehož tělesová úhlopříčka $u_t = 1m$ a rozměry jsou v poměru 3 : 4 : 5

Řešení:



Řezy tělesem:



Nejprve vypočteme z obdélníku ABCD hodnotu y : $y = \sqrt{9x^2 + 16x^2} = 5x$

Potom určíme vztah pro výpočet úhlopříčky : $u = \sqrt{25x^2 + 25x^2} = 5x\sqrt{2}$

Tato velikost má být rovna 1 : $5x\sqrt{2} = 1$

$$x = \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Odtud již určíme a , b, c : $a = \frac{3\sqrt{2}}{10}$, $b = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$V = a . b . c$

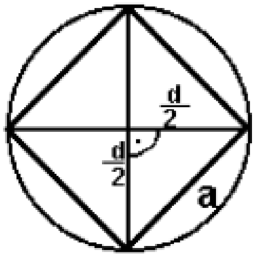
$S = 2.(ab + bc + ac)$

$$V = \frac{3\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{50} = \frac{3\sqrt{2}}{25}$$

$$S = 2\left(\frac{3\sqrt{2}.2\sqrt{2}}{50} + \frac{2.2}{10} + \frac{3\sqrt{2}.\sqrt{2}}{20}\right) =$$
$$= 2\left(\frac{12}{50} + \frac{4}{10} + \frac{6}{20}\right) = 2\left(\frac{12+20+15}{50}\right) = \frac{94}{50} = \frac{47}{25}$$

Příklad:
Dřevěný sloup tvaru rotačního válce o průměru d = 0,6 m a výšce v =3 m byl ohoblován do tvaru kvádru s čtvercovou podstavou. Jakou hmotnost má upravený sloup, je-li hustota dřeva $\rho = 800$ kg m^{-3} ?

Řešení:
K výpočtu potřebujeme určit podstavnou hranu:



Platí: $a = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2} d\sqrt{2}$

$a = 0{,}3.\sqrt{2}$

Pro určení hmotnosti potřebujeme znát objem tělesa: $V = a^2.v$

$V = 0{,}09 \,.\, 2 \,.\, 3 = 0{,}54 m^3$

Hmotnost vypočteme se znalostí vzorce z fyziky: $m = \rho .V$

$m = 800 \,.\, 0{,}54 = 432$ kg

Příklad:
Jaké množství vody proteče za hodinu potrubím kruhového průřezu o poloměru r = 8 cm, teče-li voda rychlostí 2,5 m/s?

Řešení:
Od okamžiku, kdy je voda do trubky vpuštěna nateče za hodinu do vzdálenosti: 2,5 . 3600 = 9000 m
- tento údaj vezmeme jako výšku v.

Máme počítat objem válce: v = 9000 m
r = 0,08 m
$V = \pi r^2.\, v$

$V = \pi.\, 0{,}08^2 \,.\, 9000 = 180{,}955\ m^3$

Musíme ještě převést jednotky: 180 ,955 m^3 = 180955 dm^3(litrů) = **1809,55hl**

Cvičení:

1.) Učebna má rozměry 10m, 6m a 3,6m. Kolik žáků by mohlo být do učebny umístěno, má-li podle předpisů připadnout $3m^3$ vzduchu na 1 žáka.

[71 + učitel]

2.) Je dána krychle o hraně a . Jaká musí být hrana krychle, jejíž objem má být 3x větší než objem původní krychle?

[$\sqrt[3]{3}.a$]

3.) Podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna je z = 18,1 cm a rameno r = 12,7 cm. Výška hranolu je dvojnásobkem výšky v_z podstavného trojúhelníku. Určete objem a povrch.

[V = 1437 , S = 936,4]

4.) Vypočtěte hranu podstavy pravidelného šestibokého hranolu, jehož výška je rovna hraně podstavy a jehož objem V = 152 dm^3.

[3,88]

5.) Pobočná hrana h = 10,1cm svírá s rovinou podstavy hranolu úhel γ = 52°10′, podstavou je pravidelný pětiúhelník se stranou a = 3,6 cm. Určete objem hranolu.

[177,9]

6.) Kolik metrů mosazného drátu kruhového průřezu s průměrem d = 0,5 mm váží 1 kg (ρ = 8,6 g/mm^3)?

[592,2]

7.) Určete spotřebu plechu na válcovou nádobu nahoře otevřenou, je-li průměr podstavy d = 85 mm k výšce v poměru 2 : 3.

[397,2]

8.) Kolik litrů kapaliny je v nádrži tvaru ležatého rotačního válce, průměru podstavy d = 0,4 m, délky l = 1 m, je-li hloubka kapaliny h = 5 cm?

[9,067]

9.) Určete hmotu železné součásti tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu, provrtaného ve směru osy válcovým otvorem (obr. 290). je-li pro železo ρ = 7,8g/cm^3.

[5375 g]

10.) Tyč kruhového průřezu průměru d = 35 mm a délky l = 5 m váží 35,42 kg. Určete hustotu materiálu.

[7,363]

11.) V rotačním válci je dáno: S_{pe} = 96 cm^2, V = 192 cm^3. Určete r, u.

[r = 4 cm, u = 3,82 cm]

12.) Vypočtěte výšku pravidelného trojbokého hranolu vyrobeného ze skla o hmotnosti 129,9 g a hustotě ρ = 2500 kg m^{-3}. Hrana podstavy má délku 2 cm.

[V = 52 cm^3, h = 30 cm]

4.) Jehlan, kužel

$$V = \frac{1}{3}P.v$$ P - plocha podstavy

$$S = P + \text{plášť}$$

pro kužel platí: $V = \frac{1}{3}\pi . r^2 . v$

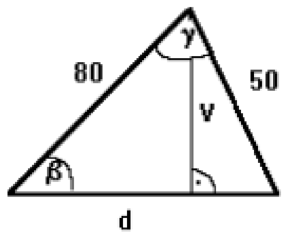
$S = \pi . r(r + s)$ s - strana kužele

Příklad:

Jaký objem má kosý kruhový kužel, jehož nejdelší strana a = 80cm svírá s nejkratší stranou b = 50cm úhel γ = 60° ?

Řešení:

Situaci zobrazíme v řezu:



Pomocí kosínové věty vypočteme d:

$$d = \sqrt{6400 + 2500 - 8000 . \frac{1}{2}} = \sqrt{4900} = 70$$

Potřebujeme ještě určit v, k jejímu nalezení potřebujeme znát hodnotu úhlu β - tu určíme sinovou větou:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin\gamma}$$

$$\sin\beta = \frac{b.\sin\gamma}{d}$$

$$\beta = 38°13'$$

Výšku u vypočteme podle definice funkce sin: $\sin\beta = \frac{b}{a}$

$$v = a.\sin\beta$$

$$v = 49,487$$

Máme všechny potřebné údaje pro dosazení do vzorce pro výpočet objemu:

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.v \qquad V = \frac{1}{3}\pi.35^2.49,487 = 63482,974cm^3$$

4) Komolý jehlan:

Objem : $V = \frac{1}{3}v(Sp_1 + \sqrt{Sp_1Sp_2} + Sp_2)$

Povrch: $S = S_{plaště} + S_{p1} + S_{p2}$

Příklad:

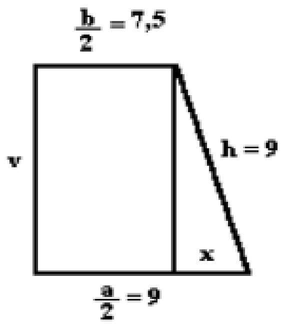
Vypočtěte povrch a objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu , je-li hrana dolní podstavy 18 cm a hrana horní podstavy 15 cm. Stěnová výška je 9 cm.

Řešení:

a) Povrch $S = S_{plaště} + S_{p1} + S_{p2}$

$$S = 4.\frac{(18+15).9}{2} + 18^2 + 15^2 = 1176cm^2$$

Pro výpočet objemu potřebujeme znát výšku tělesa. Tu nejlépe určíme v řezu.



$$x = 9 - 7,5 = 1,5$$

$$v = \sqrt{h^2 - x^2}$$

$$v = \sqrt{81 - 2,25} = 8,875$$

Dále vypočteme objem tělesa - dosazením do vzorce

$$V = \frac{1}{3}v(Sp_1 + \sqrt{Sp_1Sp_2} + Sp_2)$$

$$V = \frac{1}{3}8,875.(18^2 + \sqrt{18^2.15^2} + 15^2)$$

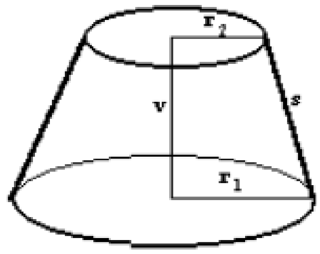
$$V = \frac{1}{3}8,875.(324 + 18.15 + 225) = 2422,63cm^3$$

5) Komolý kužel :

Objem: $$V = \frac{1}{3}\pi . v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

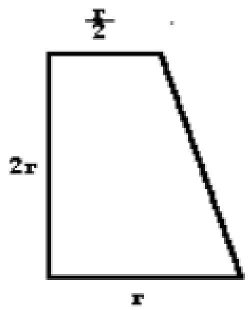
Povrch:

$$S = \pi . r_1^2 + \pi . r_2^2 + \pi \left(r_1 + r_2\right). s$$



Příklad:
Vypočtěte objem komolého rotačního kužele, jehož poloměry podstav jsou r, r/2 a výška se rovná 2r.

Řešení:



$$V = \frac{1}{3}\pi . 2r(r^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4})$$
$$V = \frac{1}{3}\pi . 2r(\frac{4r^2 + 2r^2 + r^2}{4})$$
$$V = \frac{1}{3}\pi . r\frac{7r^2}{2} = \frac{7}{6}\pi . r^3$$

Cvičení:

13.) 13.) Vypočtěte povrch a objem pravidelného komolého n-bokého jehlanu, jsou-li dány hrany podstav a_1 a a_2, pobočná hrana h nebo výška v:

a) n = 3, a_1= 11, a_2= 25, v = 4
b) n = 4, a_1= 2,4, a_2= 1,8, h = 3,4
c) n = 6, a_1= 15, a_2= 6, v = 20

[a) S = 630,07 ; V = 590 ; b) S = 37,6 ; V = 14,9 ; c) S = 2030 ; V = 6080]

14.) Kolik váží ocelový ingot tvaru pravidelného komolého jehlanu čtyřbokého, svírá-li jeho pobočná hrana h = 4dm s rovinou podstavy úhel $\phi = 60^0$, hrana větší podstavy je a= 3dm, měrná hustota ρ= 7,8g/cm^3.

[86 kg]

15.) Plášť pravidelného trojbokého komolého jehlanu je $S_1 = 324dm^2$. Pobočná hrana se rovná hraně dolní podstavy a je 2x delší než hrana horní podstavy. Určete tělesovou výšku.

[11,66]

16.) Pravidelný šestiboký komolý jehlan má podstavné hrany a = 65, a´ = 25 a pobočnou hranu b = 85. Určete objem a povrch tělesa.

[S = 34 907, V = 420 560]

17.) Podstavami pravidelného komolého jehlanu jsou čtverce. Délky jejich stran se liší o 6 dm. Objem tělesa je 1 813 dm, výška v = 7 dm. Vypočtěte délky hran obou podstav.

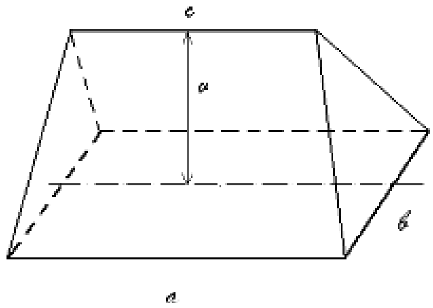
[a = 19 dm , a´= 13 dm]

18.) Vypočtěte povrch a objem pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu, je-li hrana dolní podstavy a = 48, hrana horní podstavy a´ = 44 a pobočná výška v´ = 24.

[S = 8 656, V = 50 639]

19.) Písek je narovnán na hromadě, jejíž obdélníková podstava má rozměry $a = 2{,}2$ m , $b = 1{,}7$ m. Horní hrana $c = 1{,}3$ m. Výška hromady je 1,1 m. Kolik m^3 písku je v hromadě vyrovnáno?

[$V = 1{,}776\,5\ m^3$]



20.) V rotačním kuželi svírají strany osového řezu úhel $\gamma = 70°40$, délka kruhové hrany je 84,9 cm. Vypočtěte tělesovou výšku.

[38,5 cm]

21.) Rovnostranný kužel má tělesovou výšku $v = 15$ cm, vypočtěte jeho stranu a poloměr podstavy.

[$a = 17{,}32$ cm, $r = 8{,}66$ cm]

22.) Obsah osového řezu nerotačního kužele je $P = 500$, strana $s = 40$ svírá s druhou stranou s úhel $\alpha = 30°$.Vypočtěte poloměr podstavy a tělesovou výšku.

[$r = 12{,}6$, $v = 39{,}7$]

23.) Vypočtěte objem rotačního kužele, je-li $r = 6$ cm, $S = 243{,}76$ cm.

[$V = 130{,}8$ cm]

24.) Vypočtěte povrch rotačního kužele, je-li $v = 4{,}8$ dm, $V = 130\ dm^3$.

[$S = 192{,}91\ dm^2$]

25.) Vypočtěte poloměry r_1 , r_2 podstav rotačního komolého kužele, je-li jeho strana $s = r_1 + r_2$, tělesová výška $v = 1$ dm a odchylka strany od roviny podstavy je $\alpha = 45°$.

[$r_1 = 12{,}07$; $r_2 = 2{,}07$]

26.) Násypná šachta má tvar rotačního komolého kužele ; vypočtěte poloměry podstav r_1 , r_2 , je-li strana $s = 2$ m, odchylka strany od roviny podstavy je $\alpha = 30°$ a tělesová výška kužele doplňujícího komolý kužel na úplný je $v' = 1$ m.

[$r_1 = 3{,}464$ mm ; $r_2 = 1{,}732$ mm]

27.) Vypočtěte výšku rotačního komolého kužele , je-li dán jeho objem $V = 516\ cm^3$ a poloměry podstav $r_1 = 9{,}4$ cm a $r_2 = 4{,}2$ cm

[$v = 3{,}387$ cm]

28.) Rotační kužel o tělesové výšce 22 dm a poloměru podstavy 7 dm máme rozpůlit rovinou rovnoběžnou s podstavou. Jak velký bude poloměr řezu a výšky obou částí?

[$r = 5{,}556$ dm ; $v_1 = 17{,}46$ dm ; $v_2 = 4{,}54$ dm]

29.) Střecha věže má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu o délce podstavné hrany $a = 7{,}2$ m a tělesové výšce $v = 4{,}8$ m . Kolik m^2 plechu se spotřebuje na její pokrytí, počítáme-li na spoje a odpad 15%.

[100 m^2]

30.) Kolik cm^2 materiálu se spotřebuje na výrobu nálevky tvaru komolého kužele, jehož průměry podstav jsou $d_1 = 10$ mm, $d_2 = 40$ mm a výška nálevky $v = 36$ mm?

[31 cm^2]

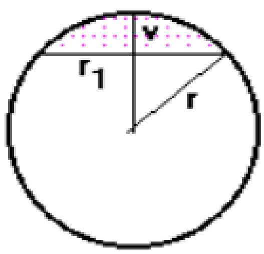
6.)Koule a její části:

Celá koule: $$V = \frac{4}{3}\pi . r^3$$

$$S = 4.\pi . r^2$$

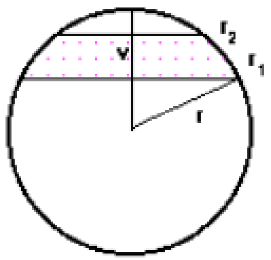
Kulová úseč: $$V = \frac{\pi . r_1^2 . v}{2} + \frac{\pi . v^3}{6}$$

Kulový vrchlík: $$S = 2.\pi . r . v$$



Kulová výseč: $V = \frac{2}{3} . \pi . r^2 . v$

Kulová vrstva: $V = \frac{\pi . r_1^2 . v}{2} + \frac{\pi . r_2^2 . v}{2} + \frac{\pi . v^3}{6}$



Kulový pás: $S = 2 . \pi . r . v$

Příklad:

Vypočtěte poloměr železné koule $(\rho = 7{,}8)$ o hmotnosti 7 250 g.

Řešení:

$$\rho = \frac{m}{V} \ldots\ldots\ldots\ldots V = \frac{m}{\rho}$$

Nejprve určíme objem koule $V = \frac{7250}{7{,}8} = 929{,}48 dm^3$

$$V = \frac{4}{3} . \pi . r^3$$

Vypočteme r :

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3.929{,}48}{4\pi}}$$

$$r = 6{,}05$$

Poloměr koule je asi 6 cm

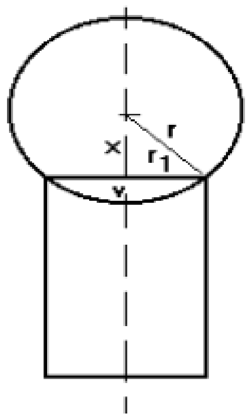
Příklad:

Válcová nádoba o poloměru $r_1 = 3$ dm je naplněna vodou. Určete, kolik litrů vody vytlačí koule o poloměru r = 5 dm, vložená na válcovou nádobu a jaký je povrch suché části koule.

Řešení:

$$r^2 = x^2 + r_1^2 \rightarrow x = \sqrt{25 - 9} = 4 dm$$

$$v = 1 \text{ dm}$$



1) objem úseče $V = \pi r . r_1^2 . \frac{v}{2} + \pi \frac{v^3}{6}$

$$V = \pi . 9 . \frac{1}{2} + \pi \frac{1}{6} = \frac{28}{6} \pi = 14{,}66 dm^3$$

2) obsah vrchlíku $S = 2\pi . r v_2 = 2\pi . 5 . 9 = 282{,}7 \text{ dm}^2$

$(v_2 = 2.r - v)$

Příklad:

Polokulovitá nádoba o poloměru r = 12 cm je naplněna vodou. Kolik litrů vody z ní vyteče, nakloníme-li ji o 30° ?

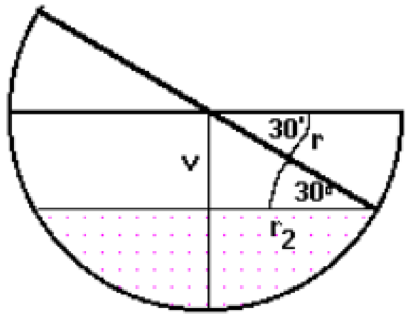
Řešení:

$\frac{v}{r} = \sin 30^o \rightarrow \quad v = 12 \ . \ 0{,}5 \ = 6$ cm

$r_1 \ = r \ = 12$ cm

$r_2 \ = 12 \ . \cos 30°$

$r_2 = \ 10{,}4$ cm



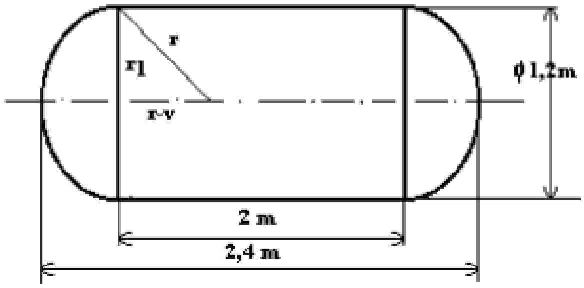
$$V = \pi . r_1^2 . \frac{v}{2} + \pi . r_2^2 \frac{v}{2} + \pi \frac{v^3}{6}$$

$$V = \pi . 144 . 3 + \pi . 10{,}4^2 . 3 + \pi . \frac{6^3}{6}$$

V = π (432 + 324 + 36) = 2488 cm^3 = 2,5 l

Příklad:

Určete povrch kotle, s rozměry:



Řešení:

v = 0,2 m

r_1 = 0,6 m

$r^2 = r^2 + (r - v)^2$

$r^2 = r_1{}^2 + r^2 - 2rv + v^2$

$$r = \frac{r_1^2 + v}{2v} = \frac{0{,}36 + 0{,}04}{0{,}4}$$

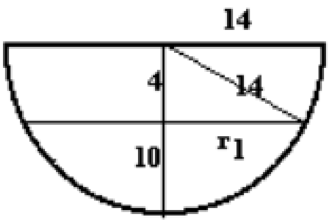
$r = 1 \ m$

$S = 2 \ . \ 2\pi rv + 2\pi . r_1 . l = 4\pi \ . \ 0{,}2 + 2\pi \ . \ 0{,}6 \ . \ 2 = 2{,}5 \ m^2 + 7{,}54 \ m^2 = \underline{10{,}04 \ m^2}$

Příklad:

Miska tvaru polokoule má vnitřní průměr d = 28 cm. Kolik litrů vody je v misce, naplní-li ji voda do výšky 10 cm?

Řešení:



$$r_1 = \sqrt{196 - 16} = \sqrt{180} = 13{,}4 cm$$

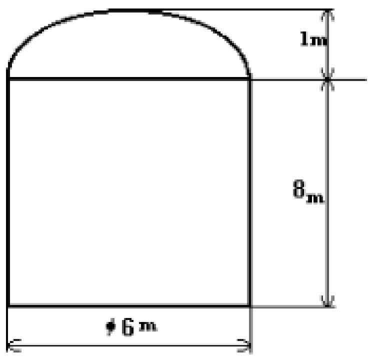
$$V = \frac{\pi . v}{6}(3r_1^2 + v^2)$$

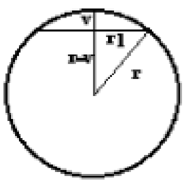
$$V = \pi . \frac{v}{2} . r_1^2 + \pi . \frac{v^3}{6}$$

$$V = \frac{\pi . 10}{6}(3 . 13{,}4^2 + 10^2) = 3344 cm^3 = 3{,}34 dm^3$$

Příklad:

Továrenská nádrž na líh se skládá z pláště rotačního válce a z kulového vrchlíku. Kolik kg nátěru je třeba na celou nádrž , jeslliže na 8,5 m^2 je třeba 1kg?





Řešení:
Výška vrchlíku

$$r^2 = (r - v)^2 + r_1^2$$

$$r^2 = r^2 - 2rv + v^2 + r_1^2$$

$$2rv = v^2 + r_1^2$$

$$r = \frac{v^2 + r_1^2}{2v} \qquad r = \frac{1 + 9}{2} = 5 \qquad r = 5m$$

$$S = 2\pi rv + 2\pi r_1.h + \pi.r_1^2$$

$$S = \pi(2rv + 2r_1h + r_1^2)$$

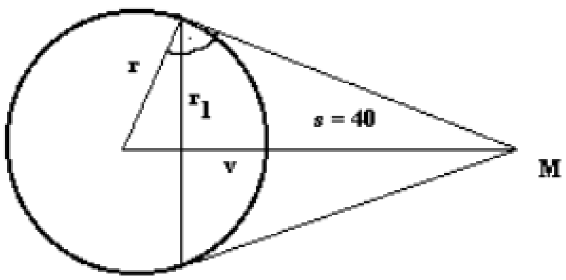
$$S = \pi(10 + 2.3.8 + 9)$$

$$S = \pi(19 + 48)$$

$$S = 212m^2$$

Spotřeba
212 : 8,5 = 24,8 kg = 25kg

Příklad:
Určete obsah osvětlené plochy na kouli poloměru r = 12 cm, kterou osvětluje svítící bod vzdálený od středu koule 40 cm.
Řešení:



$$r^2 = s(r - v)$$

$$r^2 = sr - sv$$

$$r^2 - sr = sv$$

$$v = \frac{sr - r^2}{s} = \frac{r(s - r)}{s}$$

$$v = \frac{12.28}{40} = \frac{28.3}{10} = \frac{84}{10} = 8{,}4cm$$

S = 2πrv = 2π.12.8,4 = 633,3cm^2.

Cvičení:

31.) Vypočtěte objem a povrch koule, jsou-li dány poloměry dvou rovnoběžných řezů r_1 = 28 cm , r_2 = 8 cm a jejich vzdálenost v = 15 cm.
[V = 143 790 cm^3 ; S = 13 273 cm^3]

32.) Koule o poloměru 12 cm je proťata rovinou ve vzdálenosti 4 cm od středu koule . Vypočtěte povrch a objem příslušné kulové úseče.
[S = 1 005,31 cm^2 ; V = 1 876,6 cm^3]

33.) Rovina protne kouli o poloměru r = 9,8 dm v kruhu o poloměru r_1 = 7,9 dm. Vypočtěte povrch a objem příslušné kulové úseče.
[S = 442,37 dm^2 ; V = 425,85 dm^3]

34.) Vypočtěte povrch kulového pásu, který vznikne z kulové plochy o poloměru r = 26 cm; poloměry kružnic, v nichž rovnoběžné roviny protínají kulovou plochu , jsou r_1= 13,2 cm a r_2= 10 cm.
[S = 261,38 cm^2]

35.) Jak daleko od středu koule je svítící bod , je-li osvětlena čtvrtina koule?
[x = 2r]

36.) Stanovte velikost povrchu zemského , který lze spatřit z letadla letícího ve výšce h = 3000m. (poloměr Země r = 6370 km)
[120 000km^2]